

Série 9

Solution 37. (a) La racine de l'équation est $X = -A/B$, soit $Y = B$. Nous allons transformer la densité conjointe de (A, B) en celle de (X, Y) et ensuite trouver la densité marginale de X . Utilisons théorème 98, avec

$$\begin{cases} x = g_1(a, b) = -a/b, \\ y = g_2(a, b) = b, \end{cases} \quad \begin{cases} a = h_1(x, y) = -xy, \\ b = h_2(x, y) = y, \end{cases}$$

donnant

$$|J(a, b)|_{a=-xy, b=y} = \left| \begin{pmatrix} -1/b & a/b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{a=-xy, b=y} = |1/y|,$$

et puisque $|J| > 0$ partout dans $\mathbb{R}^2$, la densité conjointe de (X, Y) est

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{A,B}(a, b)|J(a, b)|_{a=-xy, b=y}^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-a^2/2 - b^2/2} \times |y| = \frac{|y|}{2\pi} e^{-y^2(1+x^2)/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la densité marginale de X est (la densité de Cauchy)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} y e^{-y^2(1+x^2)/2} dy = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) (B, C) sont indépendants et ont chacun la distribution $U(0, 1)$, de sorte que leur densité conjointe est la suivante

$$f_{B,C}(b, c) = \begin{cases} 1, & 0 < b, c < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Il y aura deux racines réelles si $B^2 > 4C$ ou équivalent à $1 > B > 2\sqrt{C} > 0$,

$$\Pr(B > 2\sqrt{C}) = \int \int_{\{(b,c): b > 2\sqrt{c}\}} f_{B,C}(b, c) db dc = \int_0^{1/4} dc \int_{2\sqrt{c}}^1 db 1 = \int_0^{1/4} dc (1 - 2\sqrt{c}) = 1/12.$$

Solution 38. (a) Par indépendance, la densité conjointe se factorise, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{g(X)h(Y)\} &= \int g(x)h(y)f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int g(x)f_X(x) dx \int h(y)f_Y(y) dy \\ &= \mathbb{E}\{g(X)\} \times \mathbb{E}\{h(Y)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\{X - \mathbb{E}(X)\} \{Y - \mathbb{E}(Y)\}] = \mathbb{E}\{X - \mathbb{E}(X)\} \times \mathbb{E}\{Y - \mathbb{E}(Y)\},$$

et $\mathbb{E}\{X - \mathbb{E}(X)\} = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$, donnant $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Par conséquence $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$.

(b) On a $E(X) = 0$, $E(Y) = E(X^2 - 1) = E(X^2) - 1 = \text{var}(X) - 1 = 0$, alors

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) = E\{X(X^2 - 1)\} = E(X^3) - E(X) = 0,$$

puisque $E(X^r) = 0$ pour tout r impair, par symétrie de la densité normale standard (exercice 5.3(c)).

Cependant, X et Y ne sont pas indépendants; en effet, si on connaît X , alors on connaît Y . Il n'y a pas de contradiction avec le théorème 104(c) parce que Y est une fonction quadratique et non linéaire de X , donc Y ne suit pas une distribution normale. Ainsi, la distribution conjointe de (X, Y) n'est pas normale bivariée.

Solution 39. (a) Puisque a, b, c sont des constantes,

$$\text{var}(a + bX + cY) = b^2\text{var}(X) + 2bccov(X, Y) + c^2\text{var}(Y) \geq 0.$$

Soit $c = 1$ et notons que nous avons une équation quadratique $b^2\text{var}(X) + 2bcov(X, Y) + \text{var}(Y) > 0$, ce qui implique que $\{2cov(X, Y)\}^2 < 4\text{var}(X)\text{var}(Y)$, ou $\text{corr}(X, Y)^2 \leq 1$, ou $-1 \leq \text{corr}(X, Y) \leq 1$.

De plus $\text{var}(a + bX + cY) = 0$ si et seulement si $a + bX + cY$ est une constante avec probabilité 1. (Théorème 59), donc $\Pr(a + bX + cY = d) = \Pr(cY = d - a - bX) = 1$ pour certains d , qui signifie que (X, Y) sont linéairement liés.

(b) La covariance est

$$\begin{aligned} \text{cov}(a + bX, c + dY) &= E[\{a + bX - E(a + bX)\} \{c + dY - E(c + dY)\}] \\ &= E[b\{X - E(X)\} d\{Y - E(Y)\}] \\ &= bdcov(X, Y), \end{aligned}$$

et puisque $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var}(X)$, $\text{var}(c + dY) = d^2\text{var}(Y)$, on a

$$\text{corr}(a + bX, c + dY) = \frac{\text{cov}(a + bX, c + dY)}{\{\text{var}(a + bX)\text{var}(c + dY)\}^{1/2}} = \frac{bdcov(X, Y)}{\{b^2\text{var}(X)d^2\text{var}(Y)\}^{1/2}} = \text{sign}(bd)\text{corr}(X, Y).$$

(c) La partie (b) nous montre que la corrélation est sans dimension, donc la relation linéaire monotone croissante qui relie les deux échelles de température $f = 32 + 1.8c$, et son inverse $c = (f - 32)/1.8$, laisse la corrélation inchangée; elle est 0.6 sur les deux échelles de température.

Nous ne connaissons pas les variances donc nous ne sommes pas en mesure de calculer les covariances, mais nous pouvons dire qu'elles sont liées par l'expression $\text{cov}_f = 1.8^2\text{cov}_c$.

Solution 40. (a) Par théorème 106(b), nous avons que

$$N \mid T = t \sim \mathcal{N}\left\{4 + \frac{4}{25}(t - 10), 1 - 4 \times \frac{1}{25} \times 4\right\} = \mathcal{N}\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{25}t, \frac{9}{25}\right), \quad (2)$$

et avec $t = 5$ cette loi est $\mathcal{N}\{16/5, (3/5)^2\}$. Ainsi

$$\Pr(N < 4 \mid T = 5) = \Pr\left(\frac{N - 16/5}{3/5} \leq \frac{4 - 16/5}{3/5}\right) = \Phi(4/3) \simeq 0.91.$$

b) Étant donné que la distribution conditionnelle de N est gaussienne, sa médiane est égale à sa moyenne. Nous imposons donc que

$$E(N \mid T = t) = \frac{12}{5} + \frac{4}{25}t = 5,$$

donnant $t = 65/4 = 16.25$ heures.

(c) Werner souhaite trouver t tel que $\Pr(N \geq 4 \mid T = t) = 0.9$. En utilisant (2), nous voyons que

$$0.9 = \Pr(N \geq 4 \mid T = t) = \Pr\left\{\frac{N - 4 - \frac{4}{25}(t - 10)}{3/5} \geq \frac{4 - 4 - \frac{4}{25}(t - 10)}{3/5}\right\} = 1 - \Phi\left\{\frac{-\frac{4}{25}(t - 10)}{3/5}\right\}$$

ou l'équivalent que

$$\Phi\left\{\frac{4(t - 10)}{15}\right\} = 0.9.$$

Puisque $t = 10 + 15\Phi^{-1}(0.9)/4 = 10 + 15 \times 1.28/4 \simeq 14.8$, Werner devrait travailler 14.8 heures par semaine sans horaire fixe pour atteindre son but.